Exercice 1 (3 points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A(-1 , 0 , 3) ; B(3 , 0 , 0) ; C(7 , 1 , -3) et la sphère (S) d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 15 = 0$

1 1) Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 4\vec{k}$ et en déduire que : cc$3x + 4z - 9 = 0$ est une équation du plan (ABC)

0,5 2) Montrer que le centre de (S) est le point $\Omega(3 , 1 , 0)$ et que son rayon est R = 5

3) Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et orthogonale au plan (ABC)

0,5 a) Montrer que : $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 \\ z = 4t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est en représentation paramétrique de la droite (Δ)

1 b) Montrer que la droite (Δ) coupe la sphère (S) aux points E(6 , 1 , 4) et F(0 , 1 , -4)

Exercice 2 (3 points) :

1 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E) : $z^2 - 6z + 10 = 0$

2) On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ les points A , B , C d'affixes respectives : $a = 3 - i$, $b = 3 + i$ et $c = 7 - 3i$. Soient z et z' les affixes respectives d'un point M et de son image M' par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

0,5 a) Montrer que : $z' = iz + 2 - 4i$

0,25 b) Vérifier que l'affixe de C' , image du point C par la rotation R, est $c' = 5 + 3i$

1,25 c) Vérifier que : $\frac{c' - b}{c - b} = \frac{i}{2}$ et en déduire que le triangle BCC' est rectangle en B et que $BC = 2BC'$

Exercice 3 (3 points) :

Une urne contient 5 boules blanches, 3 boules rouges et 2 boules noires, indiscernables au toucher. On tire ai hasard et simultanément 4 boules de l'urne

1 1) Montrer que : $p(A) = \frac{1}{2}$ et $p(B) = \frac{41}{42}$, où A et B désignent respectivement les événements :

A : « Obtenir exactement une boule rouge »

B : « Obtenir au moins une boule blanche »

0,25 2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées

a) Vérifier que les valeurs prises par X sont 0 , 1 , 2 , 3

1 b) Montrer que : $p(X = 0) = \frac{1}{6}$ et $p(X = 2) = \frac{3}{10}$

0,75 c) Déterminer la loi de probabilité de X

Exercice 4 (3 points) :

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

0,75 $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{2u_n}$

1) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n - 1 > 0$

2) On considère la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$

1

0,75 a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, et en déduire que :

0,5 $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1}$, et en déduire : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$

3) Calculer $\lim_{n \to +\infty} w_n$ où (w_n) est la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \ln(u_n)$

Exercice 5 (8 points) :

I. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 + 4xe^{2x}$

0,5 1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 4(1 + 2x)e^{2x}$

0,5 2) Montrer que g est décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ est croissante sur $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

0,5 3) a) Montrer que : $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{2}{e}$ et vérifier que : $g\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$

0,25 b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$

II. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x - 1)e^{2x} + x + 1$

Et en désigne par (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique

1 2cm

0,75 1) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et montrer que : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

0,75 (Rappel $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$)

2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$ et en déduire que f est strictement

0,5 croissante sur $\mathbb{R}$

3) a) Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et en déduire que (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées

0,5 b) Calculer $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (x + 1)]$ et en déduire que la droite (Δ) d'équation : $y = x + 1$ est asymptote à la courbe (C_f) en $+\infty$

0,25 c) Déterminer le couple de coordonnées du point d'intersection de la droite (Δ) et la

0,25 courbe (C_f) et montrer que (C_f) est en dessous de (Δ) sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ et au-dessus de (Δ) sur

0,75 $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

1 4) a) Montrer que : $y = x$ est une équation de la droite tangente (T) à la courbe (C_f) au point O(1 , 0)

0,5 b) Montrer que (C_f) a un point d'inflexion d'abscisse $-\frac{1}{2}$

5) Tracer dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les droites (T) et (Δ) et la courbe (C_f)

6) a) En intégrant par parties, montrer que : $\int_0^{\frac{1}{2}} (2x - 1)e^{2x} dx = 1 - \frac{e}{2}$

b) Montrer que l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C_f), la droite tangente (T) à la courbe (C_f) et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = \frac{1}{2}$ est $(6 - 2e)cm^2$